ECUACIONES BASICAS DE LA MAGNETOHIDRODINAMICA IDEAL

Sebastián Ramírez Ramírez
seramirezra@unal.edu.co

pcm-ca.github.io/people/seramirezra/

La magnetohidrodinámica es la teoría que describe la dinámica de un fluido conductor en presencia de un campo electromagnético, especialmente cuando las corrientes establecidas en el fluido por inducción, modifican el campo. En hidrodinámica generalmente se trata el fluido como un medio isotrópico; es decir, el fluido no presenta una preferencia direccional en el espacio y se comporta de igual forma en cualquier dirección. En MHD al tratarse de un fluido que interactúa con el campo magnético es más complejo el fenómeno, debido a que este si presenta una dirección preferencial espacial, por lo que el fluido magnetizado debe tratarse como un medio anisotrópico. Ya que existe una interacción entre el fluido y el campo magnético, se deben acoplar las ecuaciones de Maxwell con las ecuaciones dinámicas del fluido.
Aproximación MHD ideal:

1. Aproximación de fluido: las cantidades termodinámicas locales pueden ser definidas de manera significativa en el plasma, y las variaciones en estas cantidades son pequeñas comparadas con la escala de tiempo de los procesos microscópicos en el plasma.
2. En el plasma, existe una relación local instantánea entre el campo eléctrico y la densidad de corriente; es decir, se cumple la *Ley de Ohm*
3. Se asume una alta conductividad eléctrica, lo cual previene la separación de las cargas eléctricas y por lo tanto la generación de un campo eléctrico. Por lo tanto, esto implica que los campos eléctricos resultantes son pequeños comparados con los campos magnéticos (Cuasi-neutralidad). Es decir, la densidad de energía magnética es mucho mayor que la densidad de energía eléctrica)

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E}{B} = \frac{E}{cB} \ll 1 \qquad (1.0)$$

4. Se asume que las colisiones son suficientemente frecuentes para que la distribución de partículas sea Maxwelliana y $T_i = T_e$
5. Se ignoran los avances más significativos de la física desde 1860:
   - Teoría de la Relatividad ($V^2 \ll c^2$)
   - Mecánica Cuántica
   - Corriente de Desplazamiento en la Ley de Ampere

Conservación de la Masa: Ecuación de continuidad

Consideremos un volumen $\mathcal{V}$ definido con una superficie $\mathcal{A}$ conteniendo un plasma con densidad másica ρ_M (Fig.1.0). El volumen total de masa $\mathcal{M}$ es:

$$\mathcal{M} = \iiint \rho_M dV \qquad (1.1)$$

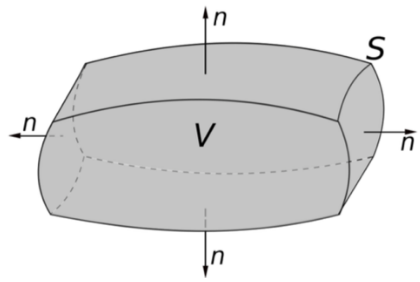

Figura 1.0: Volumen $\mathcal{V}$ que contiene un plasma

El cambio de la masa $d\mathcal{M}\ /dt$ en este volumen solo puede ser originado por el flujo de material a través de una elemento de superficie $\boldsymbol{ds} = \boldsymbol{\hat{n}}ds$, el cuál es $\rho_M \boldsymbol{v}.\,d\boldsymbol{s}$, dónde $\hat{n}$ es un vector normal a la superficie y $\vec{v}$ es la velocidad del fluido.

$$\iiint \frac{\partial \rho_M}{\partial t} d\mathcal{V} = -\oiint \rho_M \boldsymbol{v}.\,d\boldsymbol{s} \qquad (1.2)$$

usando el Teorema de Gauss se obtiene,

$$\iiint \left\{\frac{\partial \rho_M}{\partial t} + \nabla.\,(\rho_M \boldsymbol{v})\right\} dV = 0 \qquad (1.3)$$

esto debe ser cierto, para cualquier volumen; por lo tanto, el integrando debe ser igual a cero, dando lugar a la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial \rho_M}{\partial t} = -\nabla.\,(\rho_M \boldsymbol{v}) \qquad (1.4)$$

El término izquierdo de la Ec.1.4 representa la forma en que la densidad másica está cambiando temporalmente y el derecho es la medida del grado en que la velocidad converge o diverge en un punto, o en otras palabras, mide el grado en que la velocidad entra o sale a medida que un volumen se contrae y el signo menos representa el decremento.
Usando identidades vectoriales, se puede escribir la ecuación de continuidad como,

$$\frac{\partial \rho_M}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\nabla\rho_M = -\rho_M \nabla.\,\boldsymbol{v} \qquad (1.5)$$

esto da lugar a dos nuevos términos. $\boldsymbol{v}.\nabla\rho_M$ es el termino advectivo y representa la medida del grado en que cambia ρ_M influenciado por un campo de velocidades. El termino compresivo $\rho_M \nabla.\,\boldsymbol{v}$ da lugar distintos fenómenos dependiendo del valor de la divergencia.

- $\nabla.\,\boldsymbol{v} < 0 \rightarrow$ Es un flujo convergente, es decir, el fluido se está comprimiendo.
- $\nabla.\,\boldsymbol{v} > 0 \rightarrow$ Es un flujo divergente, lo cual indica que el fluido se está dilatando o expandiendo.

- $\nabla.\boldsymbol{v} \equiv 0 \rightarrow$ El plasma es incompresible, es decir, el fluido posee una densidad másica constante.

Ecuación del Momento

La segunda Ley de Newton de movimiento para un elemento de fluido es;

$$\rho_M \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} \qquad (1.6)$$

Dónde $\boldsymbol{F}$ es la fuerza que actúa por unidad de volumen sobre el elemento. Algunos ejemplos de fuerza incluyen:

- Fuerza de Lorentz: $\boldsymbol{F}_L = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}/c$
- Fuerza de gradiente de presión: $\boldsymbol{F}_{\nabla p} = -\nabla p$, donde p es la presión
- Fuerza la gravedad: $\boldsymbol{F}_g = -\rho_M \boldsymbol{g}$ o $\boldsymbol{F}_g = -\nabla \phi$ para un potencial gravitacional ϕ
- Viscosidad: $\boldsymbol{F}_V = \nabla.\Pi$, dónde Π es el tensor de estrés de viscosidad.

Desde de vista Euleriano, se considera como las propiedades del fluido varían en el tiempo en un punto fijo en el espacio, definido usualmente como un sistema de coordenadas inercial. La derivada temporal Euleriana es simplemente,

$$\frac{\partial}{\partial t} \qquad (1.7)$$

Desde el punto de vista Lagrangiano, se consideran como las propiedades del fluido varían en el tiempo en un punto que se mueve con el fluido. La derivada temporal Lagrangiana es luego,

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\nabla \qquad (1.8)$$

La ecuación del momento de la MHD ideal en forma Euleriana, despreciando la gravedad e ignorando las fuerzas de viscosidad es,

$$\rho_M \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\nabla\right)\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}}{c} - \nabla p \qquad (1.9)$$

el término de fuerza de gradiente de presión $-\nabla p$ (Fig. 1.1) empuja el plasma desde regiones de altos valores de presión hacia lugares en donde las presiones del plasma son bajas.

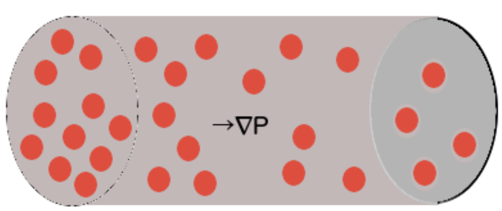

Figura 1.1: Esquema que representa físicamente la fuerza que se produce debido a un gradiente de Presión

Cuando una partícula cargada se encuentra bajo la influencia de un campo electromagnético, ésta experimenta una fuerza conocida como Fuerza de Lorentz, la cual determina su comportamiento, y se define como,

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}}{c}\right) \quad (1.10)$$

y la densidad de corriente está dada por,

$$\boldsymbol{J} = \sum_{\alpha} n_\alpha q_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha \quad (1.11)$$

dónde α incluye todas las especies de iones y electrones. Sin embargo, para un plasma quasineutral con electrones y iones cargados individualmente, la corriente está dada por,

$$\boldsymbol{J} = en(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_e) \quad (1.12)$$

donde $n = n_e = n_i$, $\boldsymbol{v}_i$ es la velocidad del ion y $\boldsymbol{v}_e$ es la velocidad del electrón.
Además, un fluido por el cuál circula una densidad de corriente $\boldsymbol{J}$, en presencia de un campo magnético $\boldsymbol{B}$, experimenta una Fuerza de Lorentz por unidad de volumen dada por,

$$\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}}{c} = \frac{(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}}{4\pi} \quad (1.13)$$

esto puede ser entendido como la suma individual de las fuerzas sobre partículas cargadas individuales

$$\sum q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = \left(\sum q\boldsymbol{v}\right)\times\boldsymbol{B} \quad (1.14)$$

utilizando la Ley de Ampere, e identidades vectoriales, la Fuerza de Lorentz se puede descomponer en dos términos con fuerzas ortogonales a $\boldsymbol{B}$

$$\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}}{c} = \frac{(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}}{4\pi} \quad (1.15)$$

$$= \frac{\boldsymbol{B}.\nabla\boldsymbol{B}}{4\pi} - \nabla\left(\frac{B^2}{8\pi}\right) \quad (1.16)$$

estos dos términos dan lugar a dos fenómenos, uno de ellos es conocido como tensión magnética (primer término de la ecuación 1.16), la cual hace referencia a la rata de cambio que es observada en el campo magnético cuando se avanza a lo largo de este, y el otro es conocido como presión magnética que es la medida de la densidad de energía asociada con el campo.
La Fuerza de Lorentz debe ser ortogonal a $\boldsymbol{B}$, por lo tanto, ambos términos deben tener componentes a lo largo de $\boldsymbol{B}$. La componente paralela de la tensión anula la parte paralela del término de la presión magnética.

Definiendo un vector unitario $\hat{\boldsymbol{b}}$ en la dirección local de $\boldsymbol{B}$: $\hat{\boldsymbol{b}} \equiv \boldsymbol{B}/|\boldsymbol{B}|$, el término $\boldsymbol{B}.\nabla\boldsymbol{B}$ de la Fuerza de Lorentz sería,

$$\boldsymbol{B}.\nabla\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{b}}.\nabla\left(B\hat{\boldsymbol{b}}\right) = \frac{\hat{\boldsymbol{b}}\left(\hat{\boldsymbol{b}}.\nabla\right)B^2}{2} + B^2\hat{\boldsymbol{b}}.\nabla\hat{\boldsymbol{b}} \quad (1.17)$$

El término $\hat{\boldsymbol{b}}.\widehat{\nabla.\boldsymbol{b}}$ es el encargado de curvar las líneas de campo magnético. Así es conveniente definir un vector $\hat{\boldsymbol{n}}$ que apunta hacia el centro de la curvatura, (Fig. 1.2)

$$\hat{\boldsymbol{n}} \equiv \hat{\boldsymbol{b}}.\nabla\hat{\boldsymbol{b}} = -\frac{\boldsymbol{R}_c}{{R_c}^2} \quad (1.18)$$

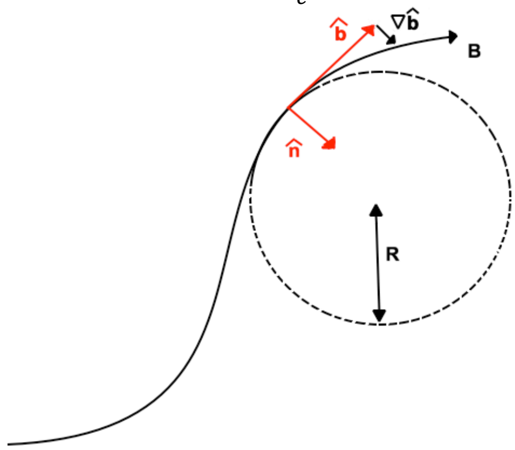

Figura 3.3: Representación de la forma en que actúa el término $\hat{\boldsymbol{b}}.\nabla\hat{\boldsymbol{b}}$ en un campo magnético $\boldsymbol{B}$.

donde $\boldsymbol{R}_c$ es un vector desde el centro de la curvatura hacia el punto considerado. Nótese que $|\hat{\boldsymbol{n}}| = {R_c}^{-1}$ y $\hat{\boldsymbol{n}}.\hat{\boldsymbol{b}} = 0$
teniendo esto en cuenta, se puede reescribir la Fuerza de Lorentz como,

$$\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}}{c} = \frac{\hat{\boldsymbol{b}}\left(\hat{\boldsymbol{b}}.\nabla\right)B^2}{8\pi} + \frac{B^2\hat{\boldsymbol{b}}.\nabla\hat{\boldsymbol{b}}}{4\pi} - \nabla\left(\frac{B^2}{8\pi}\right) \quad (1.19)$$

$$= \hat{\boldsymbol{n}}\frac{B^2}{4\pi} - \frac{B^2}{8\pi}\left(\hat{\boldsymbol{b}}\left(\hat{\boldsymbol{b}}.\nabla\right) - \nabla\right) \quad (1.20)$$

Definiendo el operador $\nabla_\perp \equiv \nabla - \hat{\boldsymbol{b}}\left(\hat{\boldsymbol{b}}.\nabla\right)$ el cuál solo actúa de forma perpendicular a la dirección del campo magnético local; entonces, la Fuerza de Lorentz se puede reescribir como,

$$\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}}{c} = \hat{\boldsymbol{n}}\frac{B^2}{4\pi} - \nabla_\perp\left(\frac{B^2}{8\pi}\right) \quad (1.21)$$

De la anterior ecuación se puede detallar que el campo magnético ejerce dos fuerzas en el fluido. Como es de esperar, ninguna de estas fuerzas tiene componente paralela al campo magnético. La fuerza de tensión magnética $\hat{\boldsymbol{n}}(B^2/4\pi)$actúa de forma perpendicular a las líneas de campo magnético, tal y como se muestra en la Fig. 1.3. y el signo de éste significa que el fluido se acelera o se desacelera hacia el centro de la curvatura de la línea del campo. Esto se deduce a partir del concepto de enfriamiento del flujo de campo magnético, el cual se discutirá más adelante. El plasma puede arrastrar la línea magnética con él; luego, esta fuerza actúa con el fin de enderezar la línea del campo reduciendo esta curvatura.

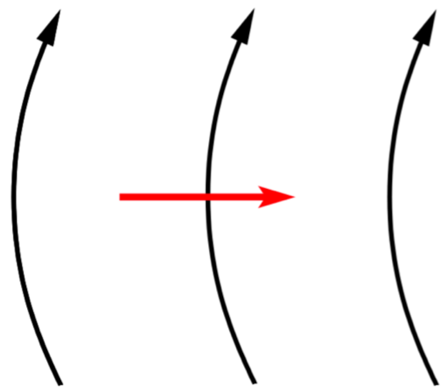

Figura 1.3: La imagen representa el concepto de tensión magnética. Cuándo las líneas de campo magnético se curvan, se genera una fuerza de restitución que tiende a reducir la tensión en las líneas (curvatura).

El término de la presión magnética $\nabla_{\perp}(B^2/8\pi)$ actúa para conducir el campo magnético desde regiones de elevada densidad de líneas de fuerza hacia sitios de menor densidad. Esto se muestra en la Fig. 1.4.

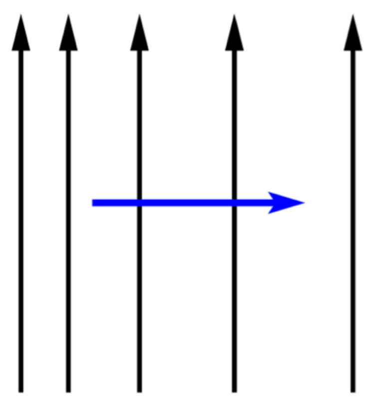

Figura 1.4: Si la densidad de líneas de campo magnético se reúne en una región espacialmente definida, se produce un gradiente de presión magnético que actúa de forma perpendicular a las líneas y tiende a equilibrarlas con el fin de reducir el aumento de densidad.

Ecuación de Energía

Las ecuaciones de MHD ideal no tienen en cuenta procesos de disipación de energía, los cuales pueden ocurrir en el movimiento de un fluido como consecuencia de fricción interna (viscosidad) e intercambio de calor entre diferentes partes de este. La ausencia de intercambio de calor entre diferentes partes del fluido significa que el movimiento es adiabático. Por lo tanto, la entropía de cualquier partícula del fluido permanece constante, $S = constante$, a medida que se mueve en el espacio, lo que se conoce como fluido isentrópico.

$$\frac{dS}{dt} = 0 \quad (1.22)$$

Se conoce la Primera Ley de la Termodinámica, $dU = dQ - pdV$. Si consideramos un elemento de masa del fluido, el cual posee un volumen $1/\rho$ y energía interna ϵ

$$d\epsilon = dQ - Pd(1/\rho) \quad (1.23)$$

$$d\epsilon = dQ + \frac{Pd\rho}{\rho^2} \quad (1.24)$$

tomando la derivada temporal, resulta

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{P}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} \quad (1.25)$$

se sabe que, $\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla.\boldsymbol{v}$ y reemplazando en 1.25 se obtiene,

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{P}{\rho}\nabla.\boldsymbol{v} \quad (1.26)$$

si se considera que, en el plasma la energía de interacción entre las partículas es pequeña en comparación con la energía cinética media del movimiento térmico de las partículas, es posible considerar que el plasma, en el sentido termodinámico se comporta como un gas ideal perfecto. De esta manera, la energía interna $\epsilon = \epsilon(P, \rho)$

$$\epsilon = P/\rho(\gamma - 1) \quad (1.27)$$

donde γ es la relación entre los calores específicos, y está dado por,

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (1.28)$$

En este caso, la ecuación de energía puede ser escrita de forma cómo,

$$\frac{dP}{dt} = (\gamma - 1)\frac{dQ}{dt} - \gamma P\nabla.\boldsymbol{v} \quad (1.29)$$

teniendo en cuenta que el fluido es isentrópico, y que por lo tanto no hay intercambio de calor $dQ/dt = 0$,

$$\frac{dP}{dt} = -\gamma P\nabla.\boldsymbol{v} \quad (1.30)$$

y de forma Euleriana, la ecuación de energía se expresaría cómo,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\nabla\right) P = -\gamma P \nabla.\boldsymbol{v} \qquad (1.31)$$

El término $-\gamma P \nabla.\boldsymbol{v}$ representa el calentamiento o enfriamiento debido a compresiones o expansiones adiabáticas.

Ecuación de Inducción

La Ley de Faraday predice la forma en que el campo magnético varía con el tiempo,

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -c\nabla\times\boldsymbol{E} \qquad (1.32)$$

Sabemos que cuando la resistencia $R \to 0$, entonces la conductividad $\sigma \to \infty$ y el campo eléctrico en el marco de referencia del fluido (marco comovil) $\boldsymbol{E}' = 0$. Esto es necesario ya que si no es cero, la corriente eléctrica seria arbitrariamente grande. Sin embargo, el fluido se encuentra en movimiento debido a la presencia del campo magnético. $\boldsymbol{E}'$ tiende a cero solo en el marco de referencia de movimiento con el fluido; no obstante, en cualquier otro marco de referencia debe tenerse en cuenta.
Asumiendo que el fluido se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ relativa a un observador $\boldsymbol{E}' \wedge \boldsymbol{B}'$ son los campos eléctrico y magnético respectivamente medidos en el marco de referencia inercial dónde el fluido está en reposo (localmente en un punto *r* y un tiempo *t*). Estos campos están relacionados a $\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{B}$ medidos en el marco de referencia del observador.
Por transformaciones de Lorentz, el campo eléctrico visto por el elemento conductor $\boldsymbol{E}'$ esta dado por,

$$\boldsymbol{E}' = \frac{\boldsymbol{E} + \dfrac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}}{c}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad (1.33)$$

Esta es una Invariante de Lorentz, pero las ecuaciones son solo Invariantes Galileanas. Expandiendo el denominador.

$$\boldsymbol{E}' = \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}}{c}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right) \qquad (1.34)$$

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad (1.35)$$

retomando $\boldsymbol{E} = 0$, e ignorando $\mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$ ya que $v \ll c$, se llega a la Ley de Ohm ideal,

$$\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}}{c} = 0 \qquad (1.36)$$

y reemplazando en la ecuación de inducción,

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \qquad (1.37)$$

La consecuencia principal de la Ley de Ohm ideal, lleva a un concepto conocido como Congelamiento del Flujo del Campo Magnético.
Consideremos una superficie $S(t)$ delimitada por un conjunto de elementos de fluido *l,* los cuales pueden cambiar de forma y posición en el tiempo. Cada punto en la curva se mueve con la velocidad local del fluido $\boldsymbol{v}$ (Fig. 1.5). El flujo a través de la superficie *S* es,

$$\psi = \iint \boldsymbol{B}.d\boldsymbol{S} \qquad (1.38)$$

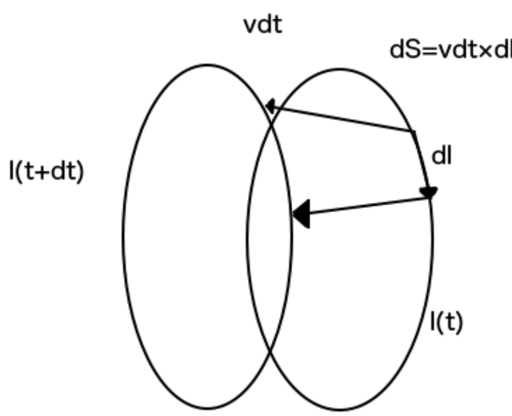

Fig. 1.5: Esquema que representa como es el movimiento del flujo magnético en un plasma siguiendo la teoría MHD ideal

Ahora, es conveniente detallar como cambia ψ de acuerdo a como *l* se mueve con el fluido. El elemento de fluido consiste de dos partes:

1. $d\psi_1$, debido a cambios en $\vec{B}$ con *l* y *S* permaneciendo fijos

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1 = \iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.d\boldsymbol{S} = -\iint \nabla \times \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{S} = -\oint \boldsymbol{E}\,.\,d\boldsymbol{l} \qquad (1.39)$$

2. $d\psi_2$, el porcentaje de flujo magnético llevado por *l* con el fluido. A medida que se mueve alrededor de *S,* cada elemento de línea que comprende se mueve una distancia $\vec{v}dt$, y cubre un área lateral $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{v}dt \times d\boldsymbol{l}$. El flujo a través de esta área es, $d\psi_2 = \boldsymbol{B}.dS = \boldsymbol{B}.\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{l}dt$, entonces

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_2 = \oint \boldsymbol{B}.\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{l} = -\oint \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\,.\,d\boldsymbol{l} \qquad (1.40)$$

el cambio total del flujo a través de *l* es luego,

$$\frac{d\psi}{dt} = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_2 \qquad (1.41)$$

$$= -\oint \boldsymbol{E} \,.\, d\boldsymbol{l} - \oint \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \,.\, d\boldsymbol{l} \qquad (1.42)$$

$$= -\oint (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) . \, d\boldsymbol{l} \qquad (1.43)$$

Sin embargo, en MHD ideal se tiene que $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = 0$, por lo tanto $d\psi/dt = 0$. Se concluye que en MHD ideal el flujo total del campo magnético a través de *S* permanece constante a medida que se mueve con el plasma. Este importante resultado es conocido como "Condición de Congelamiento". Esto puede pensarse como si las líneas de campo estuvieran atadas al fluido (y viceversa); el fluido no puede moverse a través del campo magnético.